

УДК 639.1.053(470.44)

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЗИМНЕГО МАРШРУТНОГО УЧЕТА

**И. А. Кондратенков**

*Саратовский филиал Института проблем экологии и эволюции  
им. А. Н. Северцова РАН  
Россия, 410028, Саратов, Рабочая, 24  
E-mail: kondri60@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.07.2020 г., после доработки 28.08.2020 г., принята 17.09.2020 г.

*Кондратенков И. А. О распределении коэффициента пропорциональности зимнего маршрутного учета // Поволжский экологический журнал. 2020. № 4. С. 415 – 426. DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2020-4-415-426>*

**Аннотация.** В ходе предыдущих исследований было показано, что коэффициент пропорциональности зимнего маршрутного учета (ЗМУ) зверей, входящий в соответствующую формулу ЗМУ в виде постоянного множителя  $\pi/2$ , на самом деле является случайной величиной – такой же, как и среднее число пересечений учетным маршрутом следов, приходящееся на единицу его длины, и средняя длина суточного хода зверей. Указанная величина  $\pi/2$  является значением математического ожидания коэффициента пропорциональности, если при проведении зимнего маршрутного учета зверей будут обеспечены условия равновесного пересечения учетным маршрутом суточного наследа в любом его месте и под любым углом в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . При этом и характер распределения коэффициента как случайной величины, и значения его дисперсии, как других его статистических характеристик, оставались неизвестными. В настоящем исследовании было установлено, что при выполнении вышеуказанных условий проведения учета распределение коэффициента пропорциональности ЗМУ как случайной величины будет экспоненциальным или показательным. Это позволяет заранее рассчитать значения его дисперсии и относительной статистической ошибки без сбора дополнительных учетных данных.

**Ключевые слова:** учеты охотничьих животных, зимний маршрутный учет, коэффициент пропорциональности, суточный ход зверя, суточный наслед, следовые линии.

DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2020-4-415-426>

## ВВЕДЕНИЕ

Впервые величину  $\pi/2$  в виде постоянного множителя в формуле для расчета плотности населения зверей по числу пересечения их следов учетным маршрутом предложил В. И. Малышев (1936). Позже указанную величину, опять же как постоянный множитель, при других математических моделях зимнего маршрутного учета (ЗМУ) определяли С. Д. Перелешин (1950) и Н. Г. Челинцев (1983, 2000). Однако принятые указанными выше исследователями модели учета не давали наглядной интерпретации этой величины, что вызывало у других исследователей сомнения в правильности формулы ЗМУ (Новиков, 1953; Гусев, 1965; Юргенсон, 1970; Русанов, 1984). Кроме того, все перечисленные выше модели исходили из

равновероятного или случайного размещения суточных наследов на исследуемой территории, а также равновероятной или случайной их ориентации по сторонам света, что вызвало сомнения в справедливости формулы ЗМУ уже в настоящее время (Наумов, 2014, 2015; Цындыжапова, Кожечкин, 2015). Это заставило нас предложить собственную модель учета, основанную на определении суммарной длины следовых линий зверей в пределах учетной ленты некоторой ширины (Кондратенков, 2018), а также провести ряд имитационных экспериментов (Кондратенков, 2018, 2019). Под следовыми линиями зверей здесь и далее в статье понимаются неразрывные участки суточных наследов, ограниченных учетной лентой, осью которой является учетный маршрут.

В ходе указанных экспериментов было показано, что величину  $\pi/2$  можно интерпретировать как коэффициент пропорциональности, показывающий во сколько раз при случайном или равномерном размещении учетных лент на исследуемой территории как по местоположению, так и по их ориентации в пространстве суммарная протяженность всех следовых линий в пределах учетной ленты, приходящихся в среднем на одно пересечение центральной осью ленты этих следовых линий, больше ширины учетной ленты. При этом коэффициент пропорциональности является не постоянным множителем, а случайной величиной, такой же, как и среднее число пересечений учетным маршрутом следов, приходящееся на единицу его длины, и средняя длина суточного хода этих зверей. Математическое ожидание его значения равно величине  $\pi/2$  только при условии равновероятного пересечения учетным маршрутом суточного наследа в любом его месте и под любым углом в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Для обеспечения указанного условия необходимо и достаточно равномерного размещения на исследуемой территории учетных маршрутов одинаковой длины, ориентированных не менее чем по трем равносмещенным относительно друг друга направлениям. Длина всех маршрутов по всем выбранным направлениям должна быть одинаковой, наиболее предпочтительной для этого представляется схема равномерного размещения замкнутых маршрутов в форме равносторонних треугольников. При указанном расположении учетных маршрутов на исследуемой территории характер размещения на ней учитываемых животных и ориентация их суточных наследов не имеют значения. При выполнении указанных ранее условий пересечения маршрутом суточного наследа фактическая ширина учетной ленты может быть произвольной. Кроме того, была установлена неразрывная связь коэффициента пропорциональности ЗМУ с показателем частоты пересечений маршрутом следов зверей – среднему числу пересечений маршрутом следов зверей, приходящихся на единицу его длины. Так как они основаны на двух разных характеристиках одного и того же случайного события, а именно пересечения следа зверя маршрутом. В первом случае это угол их пересечения, во втором – длина участка маршрута, приходящегося на это пересечение (Кондратенков, 2018).

Как уже отмечалось ранее, величина  $\pi/2$  вошла в формулу ЗМУ как постоянный множитель и до сих пор является таковой. Возможно, это связано с тем, что математическое ожидание случайной величины является постоянной величиной. Однако значение коэффициента пропорциональности может стать равным значе-

нию своего математического ожидания только когда число пересечений всеми маршрутами всех суточных наследов учитываемых зверей на исследуемой территории будет стремиться к бесконечности. В действительности это число всегда конечно, поэтому, как и у любой другой случайной величины, фактическое значение коэффициента пропорциональности будет всегда несколько отклоняться от своего математического ожидания (Кондратенков, 2019) и чем меньше будет число пересечений, тем больше могут быть отклонения.

Замену в формуле ЗМУ фактического значения коэффициента пропорциональности на значение его математического ожидания  $\pi/2$  можно рассматривать как замену частной средней, определенной на части генеральной совокупности, общей средней, определенной на всей генеральной совокупности случайных величин. Такая замена всегда эффективна, так как не возникает систематической ошибки, однако статистическая ошибка при этом никуда не исчезает (Кондратенков, 2017). Более того, как показали результаты предыдущего моделирования (Кондратенков, 2018), величина дисперсии значений коэффициента пропорциональности такого же порядка, что и дисперсия значений показателя частоты пересечений следов. Поэтому нельзя пренебрегать вариацией значений этого показателя учета при определении статистической ошибки оценки плотности населения учитываемых животных. Проблема заключается в том, что в отличие от значения математического ожидания коэффициента пропорциональности значение его дисперсии нам не известно. А желательно каким-либо способом эту дисперсию определить заранее, в противном случае ее придется оценивать по выборочным данным, для чего будет необходимо в ходе учета измерять углы пересечений маршрутов со следами учитываемых зверей.

Исследованию характера распределения значений коэффициента пропорциональности ЗМУ как случайной величины посвящена настоящая статья.

## МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

В основе всех упомянутых ранее методов определения значения математического ожидания коэффициента пропорциональности ЗМУ лежит формула Коши по определению средней проекции отрезка прямой длины  $l$  на другие прямые, расположенные к этому отрезку под различными углами в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Если длина отрезка прямой будет единичной, то несмещенной оценкой его средней проекции будет среднее значение синуса от угла  $\beta$ , равномерно распределенного в диапазоне от 0 до  $2\pi$ . Среднее значение синуса будет равно  $2/\pi$ , а его коэффициент вариации будет равен  $\sqrt{\pi^2/8 - 1}$  (Кендалл, Моран, 1972). В принципе, проводя ЗМУ, мы решаем обратную задачу по проекциям на перпендикуляр, проведенный к учетному маршруту, одновременно являющемуся осью учетной ленты некоторой ширины и определяем среднюю длину следовых линий, оставленных зверьми в пределах этой ленты. При случайном размещении учетных лент на исследуемой территории и при единичной их ширине несмещенной оценкой среднего значения коэффициента пропорциональности будет обратная величина от среднего значения синуса от угла  $\beta$ , равномерно распределенного в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , или  $-\pi/2$ . Если коэффициент пропорциональности был бы полностью тождественен об-

ратно величине от синуса угла  $\beta$ , то логично было бы предположить, что его коэффициент вариации тоже равен  $\sqrt{\pi^2/8 - 1}$ . Однако по результатам имитационного эксперимента, проведенного нами в 2018 г., можно было сделать предварительный вывод о том, что значение фактического коэффициента вариации больше указанной величины (Кондратенков, 2018). Что, собственно, и послужило основанием для сомнения в полной тождественности коэффициента пропорциональности ЗМУ обратной величине от синуса угла  $\beta$ .

Вначале изложим некоторые теоретические рассуждения на эту тему. Для того чтобы математическое ожидание коэффициента пропорциональности ЗМУ было равным величине  $\pi/2$ , необходимо обеспечить равную вероятность пересечения учетным маршрутом суточного наследа зверя в любом его месте. Если данное условие обеспечено, то суточный наслед также будет пересекать учетный маршрут с равной вероятностью в любом его месте. Мы можем условно объединить все маршруты в один, причем объединять маршруты можно в произвольном порядке. В этом случае точки пересечений будут занимать случайное и независимое друг от друга положение на таком объединенном маршруте и, следовательно, число пересечений следов зверей  $x$ , приходящееся на единицу суммарной длины учетных маршрутов в своем варьировании будет соответствовать распределению Пуассона. Этот вывод мы можем распространить на случай распределения точек пересечения следов на плоскости (Вентцель, 2003), для чего в качестве сторон условного прямоугольника области распределения необходимо взять суммарные протяженности учетных маршрутов  $B$  и суточных наследов  $L$ . Тогда величина  $x/LB$  – число пересечений следов, в среднем приходящееся на единицу площади указанной выше области распределения, также будет распределено по закону Пуассона. Отсюда обратная ей величина  $LB/x$  должна иметь экспоненциальное или показательное распределение. Эту величину можно интерпретировать как площадь указанной выше области распределения точек пересечения следов, приходящуюся в среднем на одно такое пересечение. Эта величина входит в формулу фактического значения коэффициента пропорциональности ЗМУ для исследуемой территории площади  $Q$  (Кондратенков, 2018):

$$k = \frac{LB}{Qx}. \quad (1)$$

Так как площадь исследуемой территории есть величина постоянная, то распределение коэффициента пропорциональности должно быть показательным, и, следовательно, его дисперсия должна быть равна квадрату его математического ожидания (Королюк и др., 1985).

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: случайные величины коэффициента пропорциональности ЗМУ и величина, обратная синусу от угла  $\beta$ , равномерно распределенного в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , хоть и имеют одинаковые значения своих математических ожиданий –  $\pi/2$ , но не являются тождественными друг другу, так как имеют различия в других характеристиках (таблица).

Для проверки указанного вывода был проведен имитационный эксперимент, собственно, был продолжен предыдущий эксперимент (Кондратенков, 2019). Его

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ

суть заключалась в следующем: в программной среде MapInfo на модельной территории, представлявшей из себя круг диаметром 5 км, последовательно на пяти позициях размещались 19 треков различных видов охотничьих животных. Далее на модельную территорию, с расположенным на ней суточным наследом, наносилась сеть параллельных маршрутов по двенадцати равносмещенным относительно друг друга направлениям. Частота маршрутной сетки для каждого наследа подбиралась таким образом, чтобы суммарное число всех пересечений его по всем направлениям было не меньше тысячи для каждого его местоположения.

Некоторые статистические характеристики коэффициента пропорциональности ЗМУ и величины обратной синусу от угла  $\beta$

**Table.** Some statistical characteristics of the proportionality coefficient of winter route count and the value of the inverse  $\sin \beta$

Случайные величины	Математическое ожидание		Дисперсия		Коэффициент вариации	
	Формула	Значение	Формула	Значение	Формула	Значение
Величина обратная синусу от угла $\beta$	$\frac{\pi}{2}$	1.571	$\frac{\pi^2(\pi^2 - 8)}{32}$	0.577	$\sqrt{\frac{\pi^2 - 8}{8}}$	0.483
Коэффициент пропорциональности ЗМУ $k$	$\frac{\pi}{2}$	1.571	$\frac{\pi^2}{4}$	2.468	1	1.000

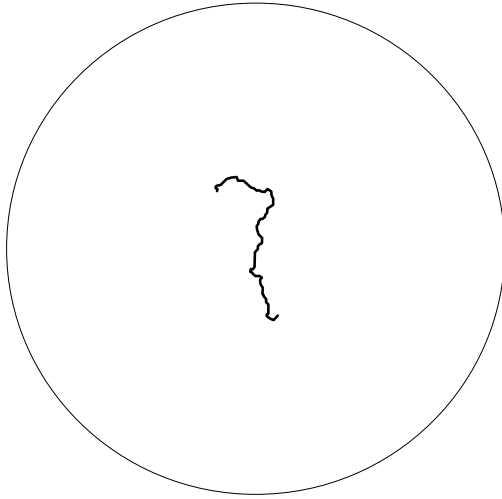
Предполагалось, что условия обитания животных в пределах модельной территории однородны, а все суточные наследы оставлены одиночными животными. Число пересечений между линиями маршрутов и наследов определялось соответствующим инструментарием программы MapInfo.

Продолжение эксперимента заключалось в том, что начальная частота маршрутной сетки уменьшалась в два раза и заново пересчитывались все пересечения маршрутов с наследами, затем частота маршрутной сетки уменьшалась еще в два раза и так далее до тех пор, пока по какому-нибудь из выбранных направлений начинали отсутствовать пересечения. В общем выполнялось требование, чтобы для каждого из 12 направлений было не менее, чем по одному пересечению суточного наследа. Так как предыдущий эксперимент показал, что размещение одного и того же наследа в различных местах модельной территории равнозначно размещению в одном месте различных наследов, то использовалось только центральное положение суточных наследов на модельной территории (рис. 1).

Всего для 19 суточных наследов было определено 123 значения коэффициента пропорциональности при различном числе пересечения их маршрутами от 14 до 1946 раз. Затем были определены квадраты отклонений фактических значений коэффициента пропорциональности от величины  $\pi/2$ , квадраты отклонений оценивались следующим образом:

$$\Delta^2(\bar{k}_i) = \left(\bar{k}_i - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\sum_j \left(k_{ij} - \frac{\pi}{2}\right)^2 x_{ij}^2}{\sum_j x_{ij}^2}, \quad \bar{k}_i = \frac{\sum_j k_{ij} x_{ij}}{\sum_j x_{ij}}, \quad k_{ij} = \frac{l_i B_j}{Q x_{ij}}, \quad (2)$$

где  $\bar{k}_i$  – среднее значение коэффициента пропорциональности для  $i$ -того суточного наследа, определенного по всем маршрутам всех направлений;  $k_{ij}$  – значение коэффициента пропорциональности для  $i$ -того суточного наследа, определенного



**Рис. 1.** Пример расположения суточных наследов на модельной территории

**Fig. 1.** An example of the location of daily footprints on the model territory

по всем маршрутам  $j$ -того направления;  $x_{ij}$  – число всех пересечений  $i$ -того суточного наследа всеми маршрутами  $j$ -того направления;  $l_i$  – длина  $i$ -того суточного наследа;  $B_j$  – общая протяженность всех маршрутов  $j$ -того направления;  $Q$  – площадь модельной территории.

Здесь следует обратить внимание на то, что коэффициент пропорциональности, определенный по формуле (1), фактически является средним из соответствующих его значений по различным направлениям и влияние вариации, вызванной различной направленностью маршрутов на конечную вариацию значений коэффициента, необходимо учитывать. Второе слагаемое в правой части выражения (2) как раз это и делает.

После расчета квадратов отклонений становится возможным определить зависимость их значений от числа пересечений учетными маршрутами суточного наследа. В качестве аппроксимирующей была выбрана степенная функция вида  $y = ax^b$ , где за  $y$  принята величина  $\Delta^2(\bar{k}_i)$ , в этом случае значение коэффициента  $a$  и будет оценкой дисперсии коэффициента пропорциональности ЗМУ.

Статистический анализ полученных результатов проводился при помощи программ Excel и Statistica.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для удобства анализа аппроксимирующая функция путем логарифмирования была преобразована в линейное выражение  $\ln y = \ln a + b \ln x$ . Аппроксимация проводилась методом наименьших квадратов, ее результаты представлены на рис. 2.

Величина  $\ln a = 0.938$  имеет стандартное отклонение  $\sigma = 0.294$ , ее фактическое отклонение от величины  $\ln(\pi^2/4) = 0.903$  равно  $0.12\sigma$ , а от величины  $\ln(\pi^2(\pi^2 - 8)/32) = -0.550 - 5.06\sigma$ . Это означает, что распределение коэффициента пропорциональности ЗМУ как случайной величины можно считать показательным. Обратное преобразование логарифмов дает выражение  $y = 2.555x^{-0.995}$ .

Таким образом, коэффициент пропорциональности не является полностью тождественным величине, обратной синусу от угла  $\beta$ , равномерно распределенного в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , так как имеет вдвое большую вариабельность. Это мож-

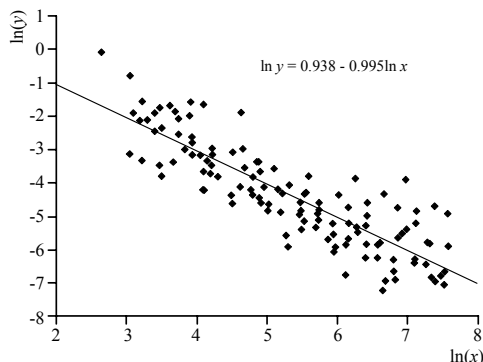
но объяснить тем, что при одной и той же ширине проекций на перпендикуляр, проведенный к учетному маршруту, вариация длин криволинейных следовых линий зверей будет больше, чем вариация длин прямолинейных отрезков – хорд, стягивающих концы этих следовых линий.

Из того, что коэффициент пропорциональности имеет показательное распределение, вытекает ряд важных следствий. Ранее различные исследователи неоднократно прибегали к предположению о случайном или пуассоновском характере распределения точек пересечения следов зверей на учетном маршруте (Смирнов, 1973; Приклонский, 1973; Челинцев, 2000 и др.). Однако прямых экспериментальных данных, подтверждающих это предположение, не приводилось. Настоящий эксперимент является хоть и не прямым, но косвенным подтверждением этому. Если выполнены условия, при котором распределение коэффициента пропорциональности ЗМУ будет показательным, то, соответственно, распределения числа пересечений следов зверей, приходящееся на единицу длины маршрутов, а также на единицу длины суточных наследов должно быть пуассоновским.

Следовательно, статистические ошибки коэффициента пропорциональности ЗМУ и показателя частоты пересечений маршрутом следов зверей одинаковы и равны  $1/\sqrt{x}$ , а так как указанные случайные величины независимы друг от друга, то относительная статистическая ошибка оценки показателя густоты следовых линий  $\hat{P}$ , представляющую собой суммарную протяженность суточных наследов, приходящуюся в среднем на единицу площади исследуемой территории, и оценки общей протяженности всех суточных наследов на исследуемой территории  $\hat{L}$ , будут равны

$$\varepsilon(\hat{L}) = \varepsilon(\hat{P}) = \sqrt{\frac{2}{x}}, \quad \hat{L} = Q\hat{P}. \quad (3)$$

Общую формулу для нахождения относительной статистической ошибки оценки густоты следовых линий, правда в других обозначениях, мы приводили ранее (Кондратенков, 2018) и считали ее тогда приближенной. Сейчас уже можем утверждать, что она была точной, так как других факторов, влияющих на вариацию показателя густоты следовых линий, кроме коэффициента пропорциональности ЗМУ и показателя частоты пересечений маршрутом следов зверей, нет.



**Рис. 2.** График функции распределения квадратов отклонений фактических значений коэффициента пропорциональности от величины  $\pi/2$  в зависимости от числа пересечений следов в логарифмическом масштабе ( $R^2 = 0.742$ ,  $p < 0.001$ )

**Fig. 2.** Plot of the distribution function of the squared deviations of the actual values of the proportionality coefficient from  $\pi/2$  as a function of the number of intersections of traces on a logarithmic scale ( $R^2 = 0.742$ ,  $p < 0.001$ )

Здесь надо оговориться, все вышесказанное верно для одиночных животных, если же животные перемещаются группами (стадами, стаями), то указанные утверждения будут верными только в отношении групповых наследов и групповых следов, рассматриваемых как одна линия, если они оставлены единой группой зверей, включая и одиночных особей. Так как даже при выполнении всех указанных ранее необходимых условий проведения учета распределение точек пересечения маршрутом всех следов для стадных или стайных животных не будет пуассоновским, а распределение значений коэффициента пропорциональности ЗМУ не будет показательным.

Для случая стадных или стайных животных выражение (3) примет следующий вид:

$$\varepsilon(\hat{L}) = \varepsilon(\hat{P}) = \sqrt{\frac{2}{x^2} (1 + C^2(b))}, \quad (4)$$

где  $x^*$  – число пересечений маршрутом групповых следов учитываемых зверей (рассматриваемых как одна линия),  $C(b)$  – коэффициент вариации числа особей в группах.

Также можно дать еще одну геометрическую интерпретацию значения коэффициента пропорциональности ЗМУ – его значение показывает во сколько раз площадь условного прямоугольника, одна сторона которого представляет собой отрезок суммарной длины суточных наследов, другая – отрезок суммарной длины маршрутов, приходящихся в среднем на одно пересечение, больше площади исследуемой территории.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в результате проведенного имитационного эксперимента было установлено, что коэффициент пропорциональности не является полностью тождественным величине, обратной синусу от угла  $\beta$ , равномерно распределенной в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , несмотря на равенство значений математических ожиданий. Если при проведении зимнего маршрутного учета зверей будут обеспечены условия равновероятного пересечения учетным маршрутом суточного наследа в любом его месте и под любым углом в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , то распределение коэффициента ЗМУ как случайной величины будет показательным. При этом распределение числа пересечений следов (групповых следов) зверей, приходящихся на единицу длины маршрута, будет пуассоновским.

То, что при проведении зимнего маршрутного учета зверей посредством соответствующего расположения учетных маршрутов на исследуемой территории могут быть созданы условия, при которых нам будут заранее известны распределения таких показателей учета, как частота пересечений маршрутом следов (групповых следов) зверей и коэффициент пропорциональности, а также значение математического ожидания последнего, является существенным преимуществом ЗМУ перед другими учетами, не столь математически обоснованными. Это позволяет, даже в отсутствие пересечений учетными маршрутами определенной протяженности следов (групповых следов) зверей, оценить при заданном уровне значимости, какой должна быть предельно возможная суммарная протяженность суточных на-



следов (групповых суточных наследов) на исследуемой территории, при которой еще могут регистрироваться следы зверей. Это может быть важным при учете редких или малочисленных видов, когда достоверно известно, что данные звери на обследуемой территории присутствуют, однако при проведении там ЗМУ пересечений их следов учетными маршрутами нет. В таком случае можно определить верхнюю доверительную границу численности «не более» для указанных видов на исследуемой территории.

Знание распределений показателей учета значительно облегчает определение статистических ошибок учета и позволяет рассчитывать их наиболее простым способом.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Вентцель Е. С.* Теория вероятностей : учебник для студентов вузов. М. : Академия, 2003. 576 с.

*Гусев О. К.* Методы определения численности соболя / Главное управление охотничье-го хозяйства и заповедников при Совете Министров РСФСР. М., 1965. 55 с.

*Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М. : Наука, 1972. 192 с.

*Кондратенков И. А.* Вопросы повышения точности учета охотничьих животных на небольших территориях // Поволж. экол. журн. 2017. № 3. С. 275 – 283.

*Кондратенков И. А.* Некоторые аспекты теории зимнего маршрутного учета охотничьих животных // Поволж. экол. журн. 2018. № 1. С. 26 – 48.

*Кондратенков И. А.* Математическая модель зимнего маршрутного учета : проверка на фальсифицируемость // Поволж. экол. журн. 2019. № 4. С. 432 – 444. DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2019-4-432-444>

*Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М. : Наука, 1985. 640 с.

*Мальшев В. И.* Количественный учет млекопитающих по следам // Вестн. Дальневосточного фил. АН СССР. 1936. Вып. 16. С. 177 – 179.

*Наумов П. П.* Пути решения проблемы внедрения и применения методик зимнего маршрутного учета охотничьих животных (ЗМУ – 2001 – 2013 гг.) // Климат, экология, сельское хозяйство Евразии : материалы III междунар. науч.-практ. конф. Иркутск : Изд-во Иркут. гос. с.-х. академии, 2014. С. 236 – 244.

*Наумов П. П.* Проблемы методического обеспечения учета ресурсов охотничьих животных // Климат, экология, сельское хозяйство Евразии : материалы IV междунар. науч.-практ. конф. Иркутск : Изд-во Иркут. гос. с.-х. академии, 2015. С. 138 – 144.

*Новиков Г. А.* Полевые исследования по экологии наземных позвоночных. М. : Сов. наука, 1953. 502 с.

*Перелешин С. Д.* Анализ формулы для количественного учета млекопитающих по следам // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1950. Т. 55, вып. 3. С. 17 – 20.

*Приклонский С. Г.* Зимний маршрутный учет охотничьих животных // Тр. Окского гос. заповедника. 1973. Вып. 9. С. 35 – 50.

*Русанов Я. С.* Следовая активность диких копытных животных как фактор, определяющий возможность учета их численности // Вопросы лесного охотоведения и недревесной продукции леса / ВНИИ лесоводства и механизации лесн. хоз-ва. М., 1984. С. 3 – 17.

*Смирнов В. С.* Математические предпосылки учета численности охотничьих животных // Тр. Окского гос. заповедника. 1973. Вып. 9. С. 13 – 29.

*Цындыжапова С., Кожечкин В.* О новой методике зимнего маршрутного учета // Охота и охотничье хозяйство. 2015. № 2. С. 10 – 13.

И. А. Кондратенков

*Челинцев Н. Г.* Математические основы зимнего маршрутного учета // Зимний маршрутный учет охотничьих животных / ЦНИЛ Главохоты РСФСР. М., 1983. С. 158 – 189.

*Челинцев Н. Г.* Математические основы учета животных / ГУ Центрохотконтроль. М., 2000. 432 с.

*Юргенсон П. Б.* Теория размещения, пространственный анализ и прикладная экология животных // Бюл. МОИП. Отд. биол. 1970. Т. 75, вып. 6. С. 5 – 16.

**Distribution of the Proportionality Coefficient of Winter Route Accounting**

**Igor A. Kondratenkov**, *kondri60@mail.ru*

*Saratov branch of A. N. Severtsov Institute of Ecology and Evolution,  
Russian Academy of Sciences  
24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia*

Received 15 July 2020, revised 28 August 2020, accepted 17 September 2020

Kondratenkov I. A. Distribution of the Proportionality Coefficient of Winter Route Accounting. *Povolzhskiy Journal of Ecology*, 2020, no. 4, pp. 415–426 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2020-4-415-426>

**Abstract.** In previous studies it was shown that the coefficient of proportionality of the winter route count (WRC) of animals included in the formula of WRC in the form of a constant multiplier  $\pi/2$ , is actually a random variable – the same as the average number of intersections account route traces per unit length, and the average length of the diurnal animals. The value  $\pi/2$  is the mathematical expectation value of the proportionality factor, provided that the count route equiprobably crosses the daily footprint at any place and at any angle from 0 to  $2\pi$  during a winter route counting of animals. At the same time, both the nature of the distribution of the coefficient as a random variable and the values of its variance as its other statistical characteristics remained unknown. In this study, it was found that when the above-mentioned count conditions are met, the distribution of the proportionality coefficient of WRC as a random variable will be exponential or power-like. This allows calculating the values of its variance and relative statistical error in advance without collecting additional count data.

**Keywords:** accounts of hunting animals, winter route accounting, proportionality coefficient, daily movement of an animal, daily footprints, trail lines.

DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2020-4-415-426>

**REFERENCES**

- Wentzel E. S. *Teoriia veroiatnostei: Uchebnik dlia studentov vuzov* [Probability Theory]. Moscow, Akademiia Publ., 2003. 576 p. (in Russian).
- Gusev O. K. *Metody opredeleniia chislennosti sobolia* [Methods for Determining the Number of Sable]. Moscow, Glavnoe upravlenie okhotnich'ego khoziaistva i zapovednikov pri Sovete Ministrov RSFSR Publ., 1965. 55 p. (in Russian).
- Kendall M., Moran P. *Geometrical Probability*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 192 p. (in Russian).
- Kondratenkov I. A. On Increasing the Accuracy of Hunting Animal Accounting in Small Areas. *Povolzhskiy J. of Ecology*, 2017, no. 3, pp. 275–283 (in Russian).
- Kondratenkov I. A. Some Aspects of the Theory of Winter Route Accounting of Hunting Animals. *Povolzhskiy J. of Ecology*, 2018, no. 1, pp. 26–48 (in Russian).
- Kondratenkov I. A. A Mathematical Model of Winter Route Counting: Checking for Falsification. *Povolzhskiy Journal of Ecology*, 2019, no. 4, pp. 432–444 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.35885/1684-7318-2019-4-432-444>

Korolyuk V. S., Portenko N. I., Skorokhod A. V., Turbin A. F. *Spravochnik po teorii veroiatnostei i matematicheskoi statistike* [Handbook on Probability Theory and Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 640 p. (in Russian).

Malyshev V. The Quantitative Account of Mammals by their Tracks. *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Academy of Sciences of the USSR*, 1936, iss. 16, pp. 177–179 (in Russian).

Naumov P. P. How to deal with the Problem of the Introduction and Implementation of Techniques of Winter Trip for Hunting Animals (will-2001–2013 biennium). *Klimat, ekologiya, sel'skoe khoziaistvo Evrazii: materialy III mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Climate, Ecology, and Agriculture of Eurasia: Materials of III International Scientific-Practical Conference]. Irkutsk, Izdatel'stvo Irkutskoi gosudarstvennoi sel'sko-khoziaistvennoi akademii, 2014, pp. 236–244 (in Russian).

Naumov P. P. Problems of Methodical Support of Resource Accounting of Game Animals. *Klimat, ekologiya, sel'skoe khoziaistvo Evrazii: materialy IV mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Climate, Ecology, and Agriculture of Eurasia: Materials of IV International Scientific-Practical Conference]. Irkutsk, Izdatel'stvo Irkutskoi gosudarstvennoi sel'sko-khoziaistvennoi akademii, 2015, pp. 138–144 (in Russian).

Novikov G. A. *Poleyve issledovaniia po ekologii nazemnykh pozvonochnykh* [Field Studies of the Ecology of Terrestrial Vertebrates]. Moscow, Sovetskaia nauka Publ., 1953. 502 p. (in Russian).

Pereleshin S. D. Analysis of the Formulas for the Quantitative Assessment of Mammals by Footsteps. *Bull. of Moscow Society of Naturalists, Biological Ser.*, 1950, vol. 55, iss. 3, pp. 17–20 (in Russian).

Priklonsky S. G. Winter Route Accounting of Hunting Animals. *Proceedings of the Oka State Nature Biosphere Reserve*, 1973, iss. 9, pp. 35 – 50 (in Russian).

Rusanov Ya. S. Trace Activity of Wild ani as a Factor in Determining the Possibility of Accounting for Their Number. In: *Voprosy lesnogo okhotovedeniia i nedrevesnoi produktsii lesa* [Issues of Forest Hunting and Non-wood Forest Products]. Moscow, VNI lesovodstva i mekhanizatsii lesnogo khoziaistva Publ., 1984, pp. 3–17 (in Russian).

Smirnov V. S. Mathematical Prerequisites for Accounting for the Number of Hunting Animals. *Proceedings of the Oka State Nature Biosphere Reserve*, 1973, iss. 9, pp. 13 – 29.

Tsyndyzhapova S., Kozhechkin V. About the New Method of Winter Route Accounting. *Okhota i okhotnich'e khoziaistvo*, 2015, no. 2, pp. 10–13 (in Russian).

Chelintsev N. G. Mathematical Foundations of Winter Route Accounting. In: *Zimnii marshrutnyi uchet okhotnich'ikh zhivotnykh* [Winter Transect Counts of Game Animals]. Moscow, TsNIL Glavokhoty RSFSR Publ., 1983, pp. 158–189 (in Russian).

Chelintsev N. G. *Matematicheskie osnovy ucheta zhivotnykh* [The Mathematical Basis of Animal Censuses]. Moscow, GU Tsentrokhokontrol' Publ., 2000. 432 p. (in Russian).

Yurgenson P. B. Theory of distribution, spatial analysis, and applied ecology of animals. *Bull. of Moscow Society of Naturalists, Biological Ser.*, 1970, vol. 75, iss. 6, pp. 5–16 (in Russian).